الفصل الثالث

حركة السوائل غير القابلة للانضغاط

هيدروكينماتك - Hydrokinematics

مقدمة: إن الدراسة الحركية للسوائل، كمقدمة اساسية للدراسة التحريكية، تتناول الحركة الصرفة لكتلة سائلية مستمرة، بغض النظر عن أسباب نشوئها. فهي إذاً دراسة هندسية صرفة تربط الوضعية المكانية لجزئيات الكتلة المعتبرة مع الزمن، بهدف ايجاد سرعة وتسارع كل من هذه الجزئيات.

3-1-01 المفاهيم الأساسية لحركة السوائل:

• حقل الجريان Flow field : يمثل المنطقة الاجمالية التي يشغلها السائل المتحرك.

لتحديد حقل الجريان نعتبر جملة احداثيات ثابتة ومطلقة ديكارتية مثلاً، فيكون عند زمن معين t موقع كل جزيء حجمي من السائل محدداً بالاحداثيات x ، y ، z وتكون سرعة الجزيء ممثلة بشعاع السرعة:

$$\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$$

حيث: u ، v ، w مركبات شعاع السرعة

$\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ الاشعة الواحدية

باتجاه المحاور x ، y ، z على الترتيب. ومنه نجد القيمة المطلقة لسرعة الجزيء:

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

• حقل السرعة Velocity field : يمثل كافة أشعة السرعة لمجموع الجزئيات الحجمية لحقل الجريان، وبالحالة العامة تكون سرعة هذه الجزئيات مختلفة بالقيمة والاتجاه، ومتغيرة في نقطة معينة مع الزمن إيضاً.

إن الدراسة الحركية التي تهدف لتحديد حقل السرعة وحقل التسارع Acceleration field يمكن أن تتم حسب طريقتين: طريقة لاغرانج، وطريقة أويلر.

3-2 . طريقة لاغرانج Lagrange - Method : تعتمد في دراسة حركة السوائل على تتبع حركة الجزيئات السائلية الإفرادية على طول مساراتها . ولتمييز الجزيء الحجمي المراد دراسة حركته، نختار من المسارات اللانهائية العدد، التي يمكن أن يسلكها الجزيء، ذلك المسار الذي يمر في اللحظة $t=0$ في النقطة $B(x_0, y_0, z_0)$، التي تمثل موضع الجزيء في لحظة البدء . ويتحدد مكان هذا الجزيء الحجمي في أية لحظة أخرى t بالإحداثيات :

$$X = f_1(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$Y = f_2(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$Z = f_3(x_0, y_0, z_0, t)$$

التي تمثل معادلة المسار، بينما يطلق على x_0, y_0, z_0, t متحولات لاغرانج . وتنتج مركبات السرعة والتسارع من معادلة المسار بالاشتقاق الجزئي بالنسبة للزمن مرة أو مرتين :

$$U = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \quad ; \quad b_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}$$

$$V = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \quad , \quad b_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}$$

$$W = \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \quad ; \quad b_Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}$$

ونحصل بالنسبة للضغط والكثافة على علاقات مشابهة .

وحيث أن طريقة لاغرانج تعتمد في دراسة حركة السائل على تتبع مصير كل جزيء حجمي منه لذلك يطلق عليها الطريقة المادية .

" Material method"، ولكنها لم تلاق نجاحاً عملياً بسبب تعقيدها وللصعوبات الرياضية التي تعترض الحلول العملية لمسائل الجريان باستخدامها.

3 - 3 - طريقة أويلر "Euler - Method": ترتكز على معرفة سرعة الجزيئات في النقاط المختلفة من حقل الجريان، وبالتالي على تحديد حقل السرعة وتغيره مع الزمن. وهذا يعني أنه بدلاً من ربط السرعة والقيم الهيدرو ديناميكية كالضغط، بجزئ جسمي معين حسب الطريقة المادية، فإن طريقة أويلر تعتبر نقطة معينة من حقل الجريان $B(x,y,z)$ وتبحث عن تغير السرعة في تلك النقطة مع الزمن. وبذلك يتم ربط القيم الهيدرو ديناميكية بالمكان والزمان، وتُمثَّل كتوابع لـ x، y، z، t التي يطلق عليها متحولات أويلر.

وعليه فإن حركة السائل تصبح محددة بمعرفة مركبات السرعة:

$$u=\frac{dx}{dt}=g_1(x,y,z,t) \quad ; \quad v=\frac{dy}{dt}=g_2(x,y,z,t) \quad ; \quad w=\frac{dz}{dt}=g_3(x,y,z,t)$$

وبحكم استمرارية الجريان فإن g_1، g_2، g_3 تمثل توابع مستمرة، وحيدة التعيين وقابلة للاشتقاق بالنسبة للمتحولات x، y، z، t وعليه ينتج بالتكامل:

$$x=f_1(a,b,c,t) \quad ; \quad y=f_2(a,b,c,t) \quad ; \quad z=f_3(a,b,c,t)$$

حيث a، b، c ثوابت تكامل يمكن تحديدها من شروط البدء. فإذا عزلنا من هذه المعادلات الزمن t نحصل على معادلة المسار.

لحساب التسارع حسب طريقة أويلر نلاحظ أنه في الحالة العامة تكون سرعة الجزيء الجسمي (المادي) الموجود لتوه في نقطة معينة $B(x,y,z)$ مختلفة عن سرعة الجزيء الذي غادر النقطة B أو الذي سيصل إليها، كذلك تتغير السرعة عند انتقال الجزيء الجسمي من نقطة إلى أخرى من حقل الجريان، وعليه فإن تسارع الجزيء الجسمي كتغير زمني للسرعة يتألف من قسمين:

- الأول ناتج عن تغير السرعة مع الزمن في كل نقطة من حقل الجريان، وهذا ما يسمى التغير المكاني أو الموضعي للسرعة.
- الثاني ناتج عن تغير السرعة أثناء حركة الجزيء، وهذا ما يسمى تغير الحمل أو الانتقال، ومجموعهما يساوي التغير المادي للسرعة.

إن حقل السرعة يحدد بالعلاقة الشعاعية: $\vec{V}=f(t,\vec{r})$

حيث $\vec{r}=\vec{i}\,x+\vec{j}\,y+\vec{k}\,z$ يمثل الشعاع المكاني لنقاط حقل الجريان بالنسبة للاحداثيات الديكارتية.

وعليه ينتج التفاضل التام أو الكلي لشعاع السرعة:

$$D\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} d\vec{r}$$

ومنه نجد بالاشتقاق شعاع التسارع في اتجاه الجريان:

$$\vec{b} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

التسارع المادي = التسارع المكاني + تسارع الحمل

يمكن ايجاد مركبات شعاع التسارع المادي $\vec{b}$ باتجاه المحاور x ، y ، Z بسهولة:

$$bx = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$by = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$bz = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

وأن القيمة المطلقة له (الطويلة) هي:

$$|\vec{b}| = \sqrt{(bx)^2 + (by)^2 + (bz)^2}$$

إن طريقة أويلر لدراسة حركة السوائل المعروفة باسم الطريقة المكانية "Local - Method" تتميز بالمقارنة مع الطريقة المادية بسهولتها وخاصة من ناحية المعالجة الرياضية.

3-4 - تصنيف حركات السوائل (الجريانات):

3-4-1 - الجريانات المستقرة وغير المستقرة:

- الجريان المستقر "Steady Flow": هو الجريان الذي يكون كل ميزاته من سرعة $\vec{v}$ وضغط P ، وكثافة ρ ، ودرجة حرارة T مستقلة عن الزمن أي توابع مكانية صرفة. $\vec{v} = f(\vec{r})$.
- الجريان غير المستقر "Unsteady Flow": هو الجريان الذي يكون فيه بعض أو كل ميزاته متغيرة مع الزمن $\vec{v} = f(t, \vec{r})$

إن صفة الاستقرار أو عدم الاستقرار ليست صفة فيزيائية مميزة للجريان ذلك أن نفس الجريان يمكن أن يكون مستقراً أو غير مستقراً تحت شروط معينة: الجريان حول قارب ، يسبح في نهر ، يكون مستقراً بالنسبة لشخص يراقب الجريان من القارب ، وغير مستقر بالنسبة لشخص يراقبه من الشاطئ.

من الأنسب اختيار محاور الاحداثيات بحيث يكون الجريان بالنسبة لها مستقراً لسهولة الدراسة .

3-4-2 . الجريانات الثلاثية، الثنائية، والأحادية المقاس (البعد) :

• إذا تميز حقل الجريان بأن المركبات الثلاثة لشعاع السرعة u ، v ، w تختلف عن الصفر فإن الجريان ثلاثي المقاس أو فراغي "Three-dimensional" .

• إذا تميز حقل الجريان بوجود مركبتين فقط لشعاع السرعة مختلفتين عن الصفر، بينما تنعدم المركبة الثالثة في كامل حقل الجريان ، فإن الجريان ثنائي المقاس أو مستوي "Two-dimensional" .

• عندما يتميز حقل الجريان بأن شعاع السرعة يتعلق باتجاه محور واحد فقط (x مثلاً) ، بينما تكون الحركة معدومة في الاتجاهين المتعامدين مع هذا المحور (y,z) فنسمي هذا الجريان وحيد المقاس "One-dimensional" .

3-4-3 - الجريانات الصفائحية والمضطربة "Laminar and Turbulent Flows" :

• يتميز الجريان الصفائحي بأن جزيئات السائل تتحرك بشكل طبقات أو صفائح "Laminar" رقيقة متوضعة فوق أو داخل بعضها البعض ، بحيث لا يحدث أثناء الحركة أي تمازج أو اختلاط بين جزيئات الطبقات ، وتنزلق كل طبقة على الأخرى بسرعة تزداد كلما ابتعدنا عن جدار الجسم .

• بينما يتميز الجريان المضطرب بأن جزيئات السائل تقوم بحركة اعتباطية لا تخضع لنظام معين تؤدي لعملية إختلاط وتمازج مستمر بين الجزيئات وفي كافة الاتجاهات .

وفقاً للعدد التشابهي (اللابعدي) Re عدد رينولدز يمكن تحديد نوعية الجريان صفائحي أم مضطرب حيث أن :

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu} \quad \text{(للأنابيب الدائرية)}$$

$v \left[\frac{m}{s}\right]$ السرعة الوسطية للجريان ، $\rho \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$ كثافة السائل

d [m] قطر الانبوب ، $\mu \left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right]$ اللزوجة التحريكية

$\nu \left[\frac{m^2}{s}\right]$ اللزوجة الحركية

بالتالي : يكون الجريان صفائحي عندما $Re < Re_{cr}$

ويكون الجريان مضطرب عندما $Re > Re_{cr}$

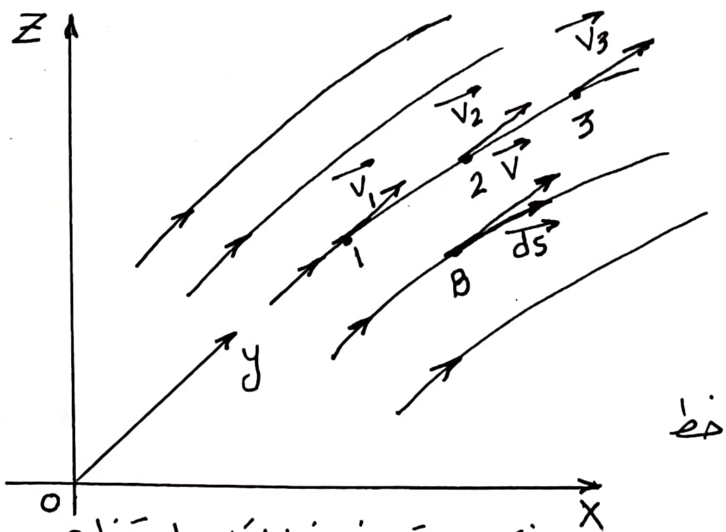
علماً بأن عدد رينولدز الحرج Re_{cr} يؤخذ عادة $Re_{cr} = 2300$

3-4-4 . الجريانات تحت الصوتية ، الصوتية ، فوق الصوتية :

بحسب العدد اللتشابهي $Ma = \frac{V}{a}$ المعروف باسم عدد ماخ "Mach-Number" ، والذي يمثل النسبة بين السرعة الموضعية للجريان V وسرعة انتشار الصوت في السائل a فإننا نميز بين :

- الجريانات تحت الصوتية "Subsonic" ، عندما $Ma < 1$
- الجريانات الصوتية Sonic عندما $Ma = 1$
- الجريانات فوق الصوتية "Suppersonic" ، عندما $Ma > 1$.

3-5 . خط المسار - خط التيار - أنبوبة التيار : كما ذكرنا سابقاً ، أن طريقة لاغرانج المادية تعتمد على معرفة الطريق التي تسلكها كل جزئية سائلية ، أي خط المسار "Path Line" ، والذي يمثل : الطريق الفعلية التي تسلكها الجزئية السائلية في حقل الجريان ، ويبين اتجاهات السرعة التي تأخذها الجزئية تباعاً مع الزمن . بينما تعتمد طريقة أويلر المكانية على معرفة سرعة الجزئ ، أي تحديد حقل السرعة من حيث القيمة والاتجاه بالتالي معرفة خط التيار "Stream Line" ، والذي يمثل : في لحظة زمنية معينة المنحني الذي يكون المماس عليه في كل نقطة منطبقاً على شعاع السرعة في تلك النقطة .



الشكل (1) تعريف خط التيار واستخراج معادلته التفاضلية .

استناداً لهذا التعريف يمكن إيجاد معادلة خط التيار - التفاضلية كما في الشكل (1) .

فإذا كان $\vec{ds}$ عنصراً خطياً من خط التيار المار من النقطة B .

Scanned with CamScanner

$\vec{V}$ شعاع السرعة في تلك النقطة، فيكون تعريفاً $\vec{V} \parallel \vec{ds}$

وبالتالي الجداء الشعاعي : $\vec{V} \wedge \vec{ds} = 0$ يمثل المعادلة الشعاعية لخط التيار

فإذا حللنا $\vec{V}$ إلى مركباته، وكذلك $\vec{ds}$ حيث:

$$\vec{ds} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$$

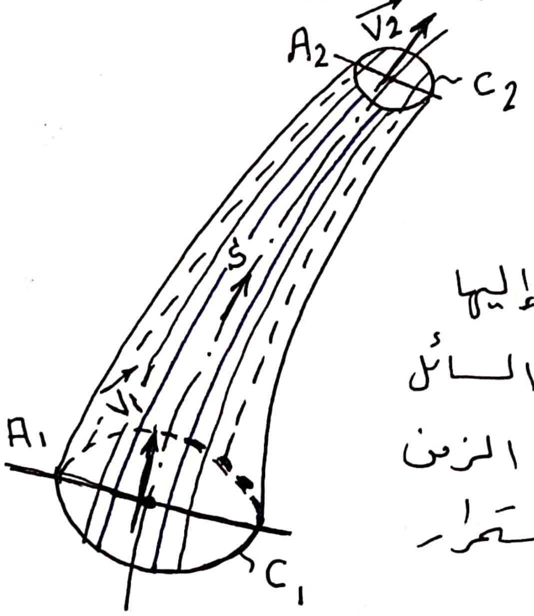
يكون :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$

تمثل المعادلة التفاضلية لخط التيار بصيغتها العامة.

ملاحظة: في حالة الجريان المستقر، وباعتبار أن مركبات السرعة لا تتغير قيمتها مع الزمن في كل نقطة من حقل الجريان، فإن خطوط التيار تبقى محافظة على شكلها وموضعها وتكون متطابقة مع خطوط المسار.

• أنبوبة التيار "Stream tube": إذا اعتبرنا داخل حقل الجريان منحنياً مغلقاً C_1 وأخذنا كافة خطوط التيار التي تمر من نقاط هذا المنحني فنحصل على سطح انبوبي الشكل يطلق عليه أنبوبة أو "سطح" التيار كما في الشكل (2)، التي لا تسمح بنفوذ السائل عبر جدارها، لأن ذلك سيعني وجود مركبة للسرعة عمودية على خط التيار، وهذا ما يتناقض مع تعريفه. وعليه يمكن النظر إليها كأنبوب ذي جدران صلبة، بالتالي كتلة السائل التي تعبر أي مقطع من مقاطعها في واحدة الزمن تبقى ثابتة. وهذا ما يعبر عنه بشرط الاستمرار لأنبوبة التيار.



الشكل (2) أنبوبة التيار

3-6- معادلة الاستمرار وحيدة البعد:

لإشتقاق معادلة الاستمرار في صياغتها البسيطة نعتبر أنبوبة التيار في الشكل (2)، حيث تدخل مقطع الدخول ① الذي مساحته A_1 والمحدد

بالمنحني المغلق C_1 كتلة معينة من السائل تخرج بكاملها من مقطع الخروج ② الذي مساحته A_2 والمحدد بالمنحني المغلق C_2. نفرض أن الجريان مستقر وخالٍ من الينابيع والبالوعات، أي أنه لا يمكن أن يظهر أي سائل جديد أو يختفي جزء من السائل المعتبر، ولتكن $\rho=\rho(s)$ كثافة السائل التي نفرضها متغيرة في اتجاه الجريان لكن ثابتة في كل مقطع عمودي عليه، فتكون كتلة السائل في واحدة الزمن التي تعبر مقطعاً ما من أنبوبة التيار مساحته A وبسرعة موزعة عليه بانتظام V هي: $\dot{m}=\rho.V.A$ وتبقى هذه الكتلة بموجب قانون انحفاظ المادة ثابتة على طول أنبوبة التيار. وعليه تأخذ معادلة الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقر الصياغة التالية:

$$\dot{m}=\frac{dm}{dt}=\rho.V.A=const \Rightarrow d\dot{m}=0$$

حيث dm كتلة السائل التي تعبر A خلال الفترة الزمنية dt. يطلق على $\dot{m}$ غزارة التدفق الكتلي أو التيار الكتلي Rate of mass، ويقاس ب $[Kg/s]$ تكتب بالنسبة لمقطعي الدخول ① والخروج ② بالشكل:

$$\rho_1V_1A_1=\rho_2V_2A_2=const \quad .$$

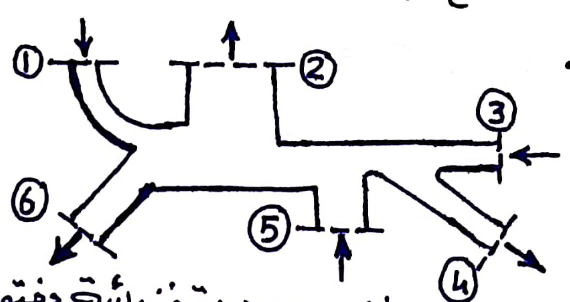
- في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط $\rho=const$ فإن:

$$\dot{V}=\frac{dV}{dt}\equiv Q=V.A=const \Rightarrow d\dot{V}=0$$

حيث dV حجم السائل الذي يعبر A خلال الفترة الزمنية dt. يطلق على $Q\equiv\dot{V}$ غزارة التدفق الحجمي أو التيار الحجمي "Volume Flow"، ويقاس ب $\left[\frac{m^3}{s}\right]$ بالمثل تكتب بين مقطعين ①، ② من أنبوبة تيار بالشكل:

$$V_1A_1=V_2A_2=const$$

- لجملة فيزيائية مفتوحة (حالة وصل وتفريع مجموعة من أنابيب التيار) كما في الشكل (3)، فإن مجموع التيارات الكتلية أو الحجمية الداخلة إليها تساوي مجموع التيارات الكتلية أو الحجمية الخارجة منها.



الشكل (3) جملة فيزيائية مفتوحة

$$\sum_i \rho_i V_i A_i = \sum_j \rho_j V_j A_j \qquad (\rho \neq const)$$

$$\sum_i V_i A_i = \sum_j V_j A_j \qquad (\rho = const)$$

حيث : $i = 1, 3, 5, \dots$ يشير إلى مقاطع الدخول .

$j = 2, 4, 6, \dots$ " " " الخروج .

• يمكن الحصول على صيغة أخرى لمعادلة الاستمرار وحيدة البعد :

$$dm = 0 \Rightarrow d(\rho V A) = 0 \Rightarrow$$

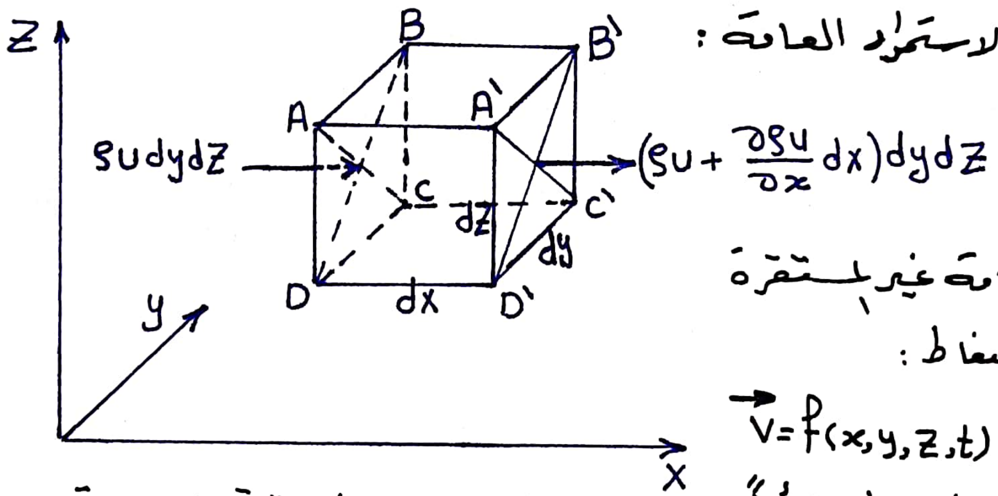
$$VA\,d\rho + \rho A\,dV + \rho V\,dA = 0$$

بالتقسيم على ρVA ينتج : $\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0}$

صياغة أخرى لمعادلة الاستمرار للجريانات المستقرة القابلة للانضغاط .

وحيدة البعد .

3 - 7 - معادلة الاستمرار العامة :



الشكل (4) اشتقاق معادلة الاستمرار العامة .

نعتبر الحركة العامة غير المستقرة لسائل قابل للانضغاط :

$$\vec{V} = f(x, y, z, t) \;;\; \rho = f(x, y, z, t)$$

ونقتطع من داخل حقل الجريان جزئياً حجمياً بشكل متوازي مستطيلات للسهولة ، أبعاده dx ، dy ، dz موازية لمحاور الاحداثيات X ، Y ، Z . ولتكن u ، v ، w تمثل مركبات شعاع السرعة $\vec{V}$ للسائل الداخل عبر وجوه متوازي المستطيلات ، باعتبار مساحة الوجوه صغيرة فإن السرعة موزعة بانتظام عليها وبالتالي كتلة السائل التي تدخل الوجه الأيسر $ABCD$ خلال الفترة الزمنية dt (حسب معادلة الاستمرار وحيدة البعد) هي : $\rho u\,dy\,dz.dt$ بينما تبلغ

كتلة السائل التي تخرج من الوجه الأيمن $A'B'C'D'$ وبالاعتماد على نشر التابع ρu كسلسلة تايلور وإهمال الحدود ذات المراتب العليا: $(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}dx)dydz.dt$

وبالتالي فإن الفرق بين الكتلة الخارجة والداخلة باتجاه المحور X هو:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\,dy\,dz.dt$$

بالمثل نجد الفرق باتجاه المحورين y ، z : $\frac{\partial \rho w}{\partial z} dx\,dy\,dz\,dt$ ، $\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx\,dy\,dz\,dt$

وبالتالي الفرق الكلي بين الكتلة الخارجة والداخلة عبر وجوه الجزيء الحجمي هو:

$$dm = \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.dt$$

هذا الفرق في كتلة السائل يجب أن يعادله بموجب قانون انحفاظ الكتلة تغير في كتلة السائل داخل الجزيء الحجمي ناتج عن تغير كثافة السائل مع الزمن ، فإذا كانت كثافة السائل في اللحظة t هي ρ فتصبح في اللحظة $t+dt$ تساوي: $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}dt$ وبالتالي التغير في الكتلة داخل الجزيء الحجمي:

$$dm' = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}dt\right)dv - \rho\, dv = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\,dy\,dz.dt$$

حيث أن ، $dm = \rho dv$ ؛ $dv = dx\,dy\,dz$

وحسب مبدأ مصونية الكتلة فإن: $dm + dm' = 0$

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,dt + \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\,dy\,dz.dt = 0$$

بالتقسيم على $dx\,dy\,dz\,.dt$ نحصل:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

وهي معادلة الاستمرار العامة لجريان ثلاثي الأبعاد ، غير مستقر وقابل للانضغاط.

ملاحظة: يمكن كتابة معادلة الاستمرار العامة لحالات خاصة منها:

- ١- الجريان المستقر: $\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$ أو شعاعياً $div(\rho \vec{V}) = 0$.
- جريان ثنائي الأبعاد غير مستقر ! $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$
- " " " مستقر : $\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$
- جريان غير قابل للانضغاط ومستقر : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ أو شعاعياً :

$$div(\vec{V}) = 0$$

هناك حالات أخرى عديدة تستنتج من معادلة الاستمرار العامة.